Четырнадцатая олимпиада Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга и Ленинградской области
(заочный тур — 2020)

Уважаемые коллеги!

Вам предлагаются два блока заданий:

№ 1 — № 7. «Математический блок» (задачи для решения).

№ 8 — № 12. «Методический блок» (задания, моделирующие работу учителя).

Среди предложенных заданий есть и достаточно трудные; присылайте Ваши решения, даже если Вам не удалось выполнить некоторые из этих заданий. Единственное условие — в работе должно быть представлено хотя бы одно верно выполненное задание из каждого блока.

Желаем успеха! ***Жюри конкурса***

I. Математический блок

1. Найдите все действительные корни уравнения $x^4 - 2x^3 - 3 = 0$.

2. Расположите в порядке возрастания числа $4\mathrm{tg}1^\circ$, $3\mathrm{tg}2^\circ$, $2\mathrm{tg}3^\circ$, $\mathrm{tg}4^\circ$.

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$|x + 2y| + \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

4. На клетчатой бумаге (длина стороны клетки равна 1) нарисована окружность радиуса $11\sqrt{3}$ с центром в вершине клетки. Сколько клеток она пересекает?

5. Двое играющих по очереди подбрасывают монету. Игра заканчивается, когда герб будет выброшен во второй раз подряд. При этом выигрывает игрок, который выбросит второй герб. Ясно, что игрок, бросающий монету первым, на своем первом ходу выиграть не может, тогда как второй игрок может выиграть уже на своем первом ходу. Выясните, насколько чаще будет выигрывать второй игрок.

6. Докажите, что для любых a, b найдется такая точка x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которой $|\sin x - ax - b| \geq 0{,}125$.

7. Докажите, что существует действительное число a, такое что многочлен

$$f(x) = a + x^4 + (x-1)^4 + \cdots + (x-10)^4$$

является квадратом некоторого квадратного трехчлена $g(x)$ с действительными коэффициентами (т.е. $f(x) = g^2(x)$).

II. Методический блок

8. Пусть функции f и g заданы на всей числовой прямой, причём функция g является обратной к функции f. Предположим, что график функции f в точке с абсциссой x_0 имеет негоризонтальную касательную l. Докажите или опровергните следующее утверждение:

Прямая, симметричная прямой l относительно прямой $y = x$, является касательной к графику функции g в точке с абсциссой $f(x_0)$.

9. Оцените приведенное ниже решение задачи, укажите все ошибки и недочеты и доведите начатое решение до верного результата

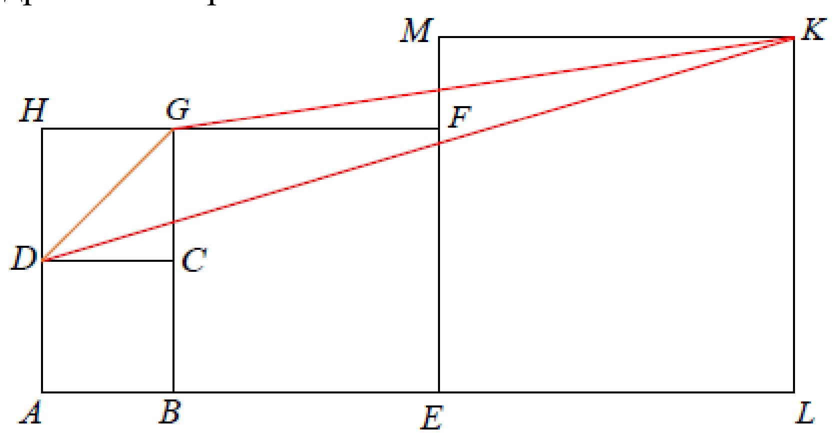
Задача. Найдите действительные корни уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение.

Сделав подстановку $x = t + \frac{1}{t}$, получаем $t^3 + 3t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^3} - 3t - \frac{3}{t} + 1 = 0$, откуда $t^3 + \frac{1}{t^3} + 1 = 0$, $t^6 + t^3 + 1 = 0$. Последнее уравнение заменой $t^3 = z$ сводится к квадратному уравнению $z^2 + z + 1 = 0$ с отрицательным дискриминантом, которое действительных корней не имеет, а, значит, их не имеет и исходное уравнение.

Решите предлагаемые ниже задачи № 10 и № 11 возможно большим числом способов (различными считаются способы, в которых используются различные математические идеи, а также различные технические приемы реализации одной и той же идеи). Укажите место каждого из использованных Вами способов решения в школьном курсе математики.

10. Квадраты *ABCD*, *DCGH*, *BEFG* и *ELKM* расположены так, как это показано на рисунке. Найдите площадь треугольника *DGK*, если известно, что площадь квадрата *ABCD* равна 20.



11. Докажите следующее тождество для биномиальных коэффициентов

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}.$$

12. Задача для исследования. Найдите условия, при выполнении которых образ угла при его ортогональном проектировании на плоскость оказывается меньше исходного угла.